La calculatrice est autorisée. Les cinq exercices sont indépendants.

Une grande part de la notation sera accordée à la rédaction et aux justifications données (plutôt qu'au résultat lui-même)

Dans les exercices 3, 4 et 5, une question non démontrée peut être admise et utilisée pour les suivantes.

Exercice 1 (3 points)

Dans chacun des cas, étudier la limite de la suite proposée :

$$a_n = \frac{5n^3 + 2n - 4}{n^3 + n^2 + 1}$$

$$b_n = \frac{2\sin n + 3}{n+1}$$

$$c_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$$

Exercice 2 (2 points)

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Rappel : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Ou, si vous préférez : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

Exercice 3 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

3. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (v_n).
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (3 points)

Un client dispose, au 1er janvier 2000, d'une somme de 1000 € qu'il dépose sur un compte. La banque rémunère à 5% d'intérêts annuels toutes les sommes déposées et verse ces intérêts sur le compte tous les 31 décembre de chaque année. De plus, le client décide de rajouter 950 € tous les 31 décembre de chaque année. On désigne par u_n ($n \in \mathbb{N}$) la somme disponible après n années écoulées depuis le 1er janvier 2000, ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la relation :

$$u_{n+1} = 1{,}05\, u_n + 950$$

3. Exprimer u_n en fonction de n. (On pourra chercher α tel que $\alpha = 1{,}05\alpha + 950$ et poser $v_n = u_n - \alpha$)

   Quel sera le capital du client après 10 années écoulées depuis le 1er janvier 2000 ?

Exercice 5 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{2x^2}$$

   En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   a) Calculer u_1 et u_2. (On donnera les résultats sous forme de fraction puis sous forme décimale arrondis à 10^{-5} près)

   b) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leqslant \frac{3}{2}$$

   (On pourra utiliser le sens de variation de f sur un intervalle que l'on précisera)

   En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

   d) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$$

   e) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 1 (4 points)

Suite (a_n)

On a : $$a_n = \frac{5n^3+2n-4}{n^3+n^2+1} = \frac{n^3\left(5+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{5+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 5$

Remarque : on pouvait aussi utiliser la règle suivante "la limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ (ou $-\infty$) est égale au quotient des termes de plus haut degré", ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3}{n^3} = 5$$

Suite (b_n)

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$

En multipliant par 2 : $-2 \leqslant 2\sin n \leqslant 2$

En ajoutant 3 : $1 \leqslant 2\sin n + 3 \leqslant 5$

En divisant par $(n + 1)$, qui est une quantité strictement positive :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{2\sin n+3}{n+1} \leqslant \frac{5}{n+1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n+1} = 0$.

Du théorème des "gendarmes", on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

Suite (c_n)

En divisant numérateur et dénominateur par 5^n, on obtient :

$$c_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

Or, nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ (limite d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{5} \in]-1 ; 1[$)

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$

Exercice 2 (2 points)

On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

- On a $\wp(1)$ puisque $1^3 = 1^2$. La propriété $\wp$ est donc initialisée au rang 1.

- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On utilise ici la relation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On a alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\wp(n)}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

En factorisant par $(n+1)^2$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Ce qui est $\wp(n+1)$.

On a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 1.

Bilan : $\wp$ est initialisée au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1, donc elle est vraie à partir du rang 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 3 (4 points)

1. On considère la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 3$$

La condition $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ entraînera $u_n \neq -1$ et donc nous assurera que la suite (u_n) est bien définie.

- Comme $u_0 = 3$, on a $\wp(0)$. Donc $\wp$ est initialisée au rang 0.
- Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

En ajoutant 1 : $1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 4$

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0 ; +\infty[$ (et donc sur $[1 ; 4]$), il vient :

$$1 \geqslant \frac{1}{1+u_n} \geqslant \frac{1}{4}$$

Multiplions par 2 : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

D'où : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

Ce qui est $\wp(n+1)$.

La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 0.

Bilan : la propriété $\wp$ est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0. Du principe du raisonnement par récurrence, on déduit qu'elle est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.

On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{2}{1+u_n} - 1}{\dfrac{2}{1+u_n} + 2} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = -\frac{1}{2}\,\frac{u_n-1}{u_n+2} = -\frac{1}{2} v_n$$

Les quotients en jeu dans les calculs ci-contre ont bien un sens car $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. On ne peut donc pas avoir $u_n = -1$ ni $u_n = -2$.

Ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

3. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$v_n = v_0 q^n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

On a donc :

$|v_n| \leqslant \frac{2}{5} < 1$

Comme $-\frac{1}{2} \in]-1\,;1[$, on a : $$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

D'où : $$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

4. De la relation $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$, on déduit : $$v_n(u_n + 2) = u_n - 1$$ $$u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$$

Et comme $v_n \neq 1$ (puisque $|v_n| < 1$) : $$u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$$

Comme on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, il vient : $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Exercice 4 (3 points)

1. On a : $$u_1 = \text{capital au 1er janvier 2001} = \left(1 + \frac{5}{1000}\right) \times 1000 + 950 = 2000$$

De même : $$u_2 = 1{,}05u_1 + 950 = 3050$$ $$u_3 = 1{,}05u_2 + 950 = 4152{,}50$$

2. Le capital après $(n + 1)$ années s'obtient en augmentant le précédent de 5% et en ajoutant 950, d'où : $$u_{n+1} = 1{,}05\, u_n + 950$$

3. Soit α l'unique réel vérifiant : $$\alpha = 1{,}05\alpha + 950$$

On a donc : $$\alpha = -19000$$

Posons $$v_n = u_n - \alpha$$

En soustrayant, membre à membre les deux égalités suivantes :
$$\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}05u_n + 950 \\ \alpha = 1{,}05\alpha + 950 \end{cases}$$

on obtient : $$u_{n+1} - \alpha = 1{,}05(u_n - \alpha)$$

C'est-à-dire : $$v_{n+1} = 1{,}05v_n$$

Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,05 d'où :
$$v_n = v_0 \times 1{,}05^n = 20000 \times 1{,}05^n$$

D'où : $$u_n = 20000 \times 1{,}05^n - 19000$$

Le capital du client après 10 années écoulées depuis le 1er janvier 2000 est :
$$u_{10} = 20000 \times 1{,}05^{10} - 19000 \simeq 13577{,}89 \text{ euros}$$

Exercice 5 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Remarque : cette fonction f est **impaire**.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{2x^2}$$

Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $2x^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de la dérivée f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des signes :

$x - \sqrt{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{2}$

$x + \sqrt{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\sqrt{2}$

Un carré est positif ou nul

Ne pas oublier de compléter le tableau de variation avec les **valeurs des limites et des éventuels extremums.**

Les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to0^+} \frac{2}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to0^+} x = 0$$

Les limites en $-\infty$ et 0^- s'en déduisent facilement en utilisant le fait que f est impaire.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) $u_1 = \frac{17}{12} \simeq 1{,}41667$; $u_2 = \frac{577}{408} \simeq 1{,}41422$ à 10^{-5} près d'après la calculatrice.

b) Notons $\wp$ la propriété définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leqslant \frac{3}{2}$$

Montrons que $\wp$ est initialisée au rang 0 :

Comparons les carrés des nombres u_1, u_0 et $\sqrt{2}$:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 = \frac{288}{144} \quad u_1^2 = \frac{289}{144}, \quad u_0^2 = \frac{9}{4} = \frac{324}{144}$$

D'où :

$$0 \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^2 < u_1^2 < u_0^2 \leqslant \frac{9}{4}$$

Par croissance de l'application $t \mapsto \sqrt{t}$, nous obtenons :

$$0 \leqslant \sqrt{2} < u_1 < u_0 \leqslant \frac{3}{2}$$

Attention, en général :

$\sqrt{t^2} = |t|$

Lorsque $t \geqslant 0$, cela donne $\sqrt{t^2} = t$

Lorsque $t \leqslant 0$, cela donne $\sqrt{t^2} = -t$

D'où $\wp(0)$.

Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\quad \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leqslant \frac{3}{2}$

Comme f est strictement croissante sur $[\sqrt{2} ; \frac{3}{2}]$, nous avons :

$$f\left(\sqrt{2}\right) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\right)$$

Or, $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{17}{12}$.

D'où :
$$\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1} \leqslant \frac{17}{12} \leqslant \frac{3}{2}$$

Ce qui est $\wp(n+1)$.

Bilan : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$

En conséquence, la suite (u_n) est **décroissante** et **minorée** (par $\sqrt{2}$) donc **convergente**.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2}$$

Or, d'après la question b), on sait que : $\quad \sqrt{2} < u_n$

Par passage à l'inverse : $\quad \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où :
$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}u_n + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}$$
$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}u_n - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

d) Soit $\wp$ la propriété définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : 0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$$

- On a : $0 < u_0 - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$ d'où $\wp(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$. Alors :

$$0 \overset{2.b)}{<} u_{n+1} - \sqrt{2} \overset{2.c)}{<} \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) \overset{\wp(n)}{\leqslant} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$$
$$0 < u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$$

Ce qui est $\wp(n+1)$.

Bilan : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$$

e) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ (puisque $\dfrac{1}{2} \in]-1\,;\,1[$), nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right) = 0$$

Du théorème des gendarmes, on déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$