La calculatrice est autorisée. Les exercices sont indépendants.

Une grande part de la notation sera accordée à la rédaction et aux justifications données (sauf QCM).

Exercice 1 (8 points) *Équation dans $\mathbb{C}$ - Étude d'une inversion*

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{e_1}\,,\ \vec{e_2}\,)$.

L'unité graphique est 4 cm. (On ne représentera que la partie du plan correspondant aux parties réelles positives)

1. On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$(E) : z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0$$

   a. Vérifier que $z_0 = 4$ est une solution de (E). Déterminer trois réels a, b et c tels que (E) s'écrive :

$$(E) : (z - 4)(az^2 + bz + c) = 0$$

   b. Résoudre l'équation (E). On notera z_1 sa solution ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.

   Déterminer la forme exponentielle de z_1 et de z_2.

   c. Démontrer que les images respectives M_0, M_1 et M_2 de z_0, z_1 et z_2 sont sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω d'affixe $\omega = 2$ et de rayon $R = 2$. Illustrer.

2. On considère la transformation f du plan qui à tout point $M(z)$, distinct de O, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}$$

   a. Déterminer l'ensemble des points M invariants par f.

   b. Démontrer que, pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés et que $OM \times OM' = 1$.

   c. Calculer les affixes des points M'_0, M'_1 et M'_2 images, par f, des points $M_0(4)$, $M_1(2 + 2\mathbf{i})$ et $M_2(2 - 2\mathbf{i})$.

   Placer les points M'_0, M'_1 et M'_2 sur la figure.

   d. Soit M_3 l'image de M_1 par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

   Calculer l'affixe z_3 de M_3 puis l'affixe du point M'_3 image de M_3 par f. Placer M'_3 sur la figure.

   e. Quelle conjecture peut-on faire au sujet de l'image du cercle $\mathscr{C}$ par la transformation f ?

3. Le but de cette question est de démontrer la conjecture faite en 2. e.

   a. Démontrer que pour tout nombre complexe z, non nul, on a :

$$|z - 2| = 2 \iff \left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$$

   b. En déduire l'image $\mathscr{D}$ du cercle $\mathscr{C}$ par la transformation f.

   On donnera une équation de $\mathscr{D}$ et on la tracera.

<u>Exercice 2</u> (6 points) *QCM - Étude d'une configuration classique*

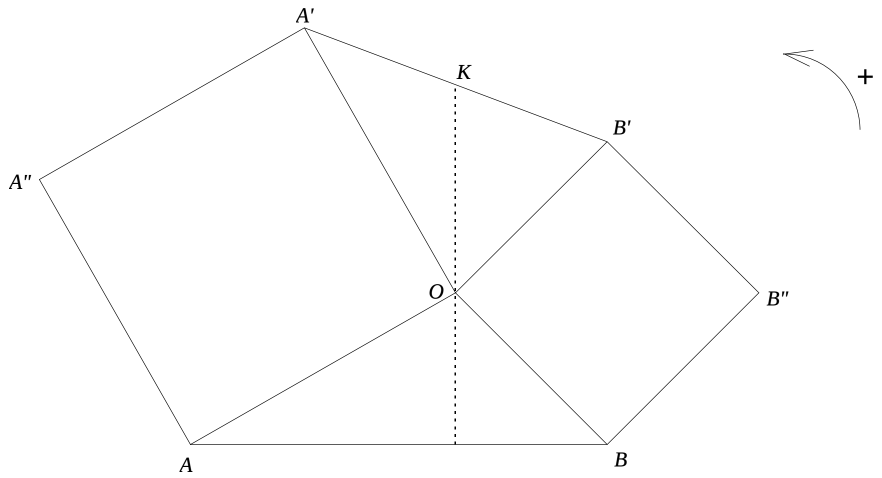
Pour chaque question, ***au moins une*** *des 4 propositions P_1, P_2, P_3 et P_4 est exacte.*
On demande d'indiquer la ou lesquelles sans aucune justification.
Barème pour chaque question :

- *toutes les réponses correctes cochées : 1 point*
- *Absence de réponse : 0 point*
- *Au moins une réponse incorrecte cochée : –0,5 point*
- *Autres cas : 0,5 point.*

On complétera, en annexe, la grille de réponse qui est à rendre avec la copie.
Si le total des points est négatif, la note de cet exercice est ramenée à 0.

<u>Situation géométrique</u> :

Dans un repère orthonormé direct de centre O, on considère un triangle OAB de sens direct. On construit, à l'extérieur de ce triangle, des carrés $OAA''A'$ et $OBB''B'$. (Voir figure ci-dessous)



Le point K est le milieu de $[A'B']$.

On note a et b les affixes respectives de A et B.

Le but du QCM est d'étudier quelques propriétés de cette configuration.

1. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est :

   P_1 □ ab P_2 □ $a - b$ P_3 □ $b - a$ P_4 □ $a + \mathrm{i}b$

2. Le point A' est l'image de :

   P_1 □ A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

   P_2 □ B' par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

   P_3 □ A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

   P_4 □ A'' par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

   L'affixe de A' est donc $a' = -\mathrm{i}a$.

3. Le point B' est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Son affixe b' est donc égale à :

   P_1 □ $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} b$ P_2 □ $\mathrm{i}b$ P_3 □ $-\mathrm{i}b$ P_4 □ $\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}} b$

4. Soit k l'affixe du milieu K de $[A'B']$. Alors, le nombre complexe $\dfrac{k}{b-a}$ est égal à :

P_1 □ $-\dfrac{\mathbf{i}}{2}$ P_2 □ $2\mathbf{i}$ P_3 □ $-2\mathbf{i}$ P_4 □ $\dfrac{\mathbf{i}}{2}$

On en déduit que la droite (OK) est perpendiculaire à (AB) et que $AB = 2OK$.

5. Cocher la (ou les) proposition(s) qui permet(tent) de prouver que (AB') et $(A'B)$ sont perpendiculaires.

P_1 □ Le nombre complexe $\dfrac{b-a'}{b'-a}$ est réel.

P_2 □ La rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme $[AB']$ en $[A'B]$.

P_3 □ Le nombre complexe $\dfrac{b-a'}{b'-a}$ est imaginaire pur.

P_4 □ Rien ne permet de prouver que ces droites sont perpendiculaires.

6. Cocher la (ou les) proposition(s) qui permet(tent) de prouver que les longueurs AB' et $A'B$ sont égales.

P_1 □ Le nombre complexe $\dfrac{b-a'}{b'-a}$ est égal à 1.

P_2 □ Le nombre complexe $\dfrac{b-a'}{b'-a}$ est de module 1.

P_3 □ La rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme $[AB']$ en $[A'B]$.

P_4 □ Rien ne permet de prouver que ces longueurs sont égales.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Nom : ______________________ Prénom : _________________

Grille de réponses au QCM.
(Mettre une croix pour chaque proposition correcte)

Proposition / n° question	P_1	P_2	P_3	P_4	Points obtenus (Ne pas compléter cette colonne)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
				Total	

Exercice 3 **(6 points)** *Trois triangles équilatéraux isométriques ayant un sommet commun*

PREMIÈRE PARTIE

On note $\mathbf{j}$ le nombre complexe $\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$.

1. Montrer les propriétés suivantes de $\mathbf{j}$:

   (a) $\mathbf{j} = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

   (b) $\mathbf{j}^3 = 1$

   (c) $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 0$

   (d) $-\mathbf{j}^2 = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}$

2. Dans un repère orthonormé direct du plan, on considère les points M, N et P d'affixes respectives m, n et p.

   (a) Démontrer la propriété :

   Le triangle MNP est équilatéral de sens direct si, et seulement si, $m - n = -\mathbf{j}^2(p - n)$

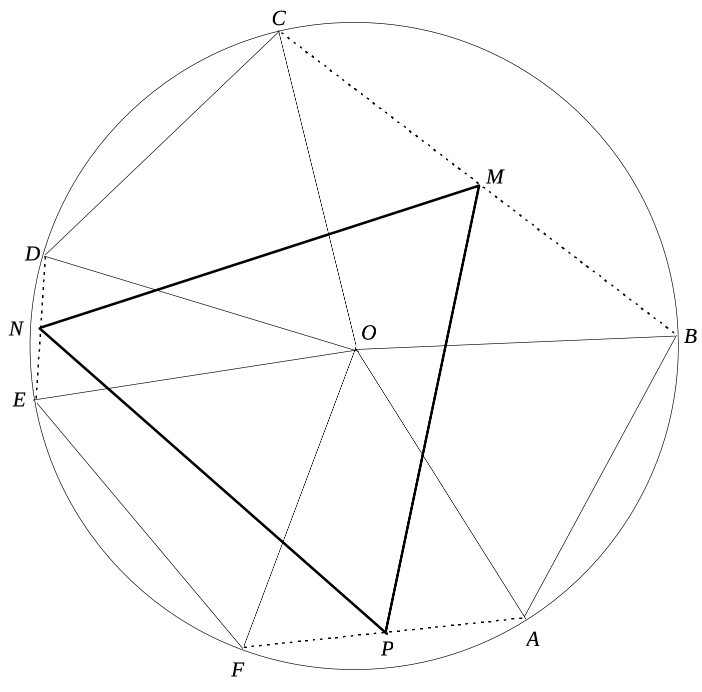
   (b) En déduire la propriété suivante :

   Le triangle MNP est équilatéral de sens direct si, et seulement si, $m + n\mathbf{j} + p\mathbf{j}^2 = 0$

DEUXIÈME PARTIE

On considère un cercle de centre O et des points A, B, C, D, E et F de ce cercle tels que les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ aient la même mesure $\frac{\pi}{3}$. Soient M, N et P les milieux respectifs des cordes [BC], [DE] et [FA].

Montrer que le triangle MNP est équilatéral de sens direct.



Exercice 1 **(8 points)** *Équation dans* $\mathbb{C}$ - *Étude d'une inversion*

1. a. On a : $$4^3 - 8 \times 4^2 + 24 \times 4 - 32 = 64 - 128 + 96 - 32 = 0$$

Donc $z_0 = 4$ est bien une solution de (E).

L'équation (E) est donc factorisable par $(z - 4)$. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$(E) : (z - 4)(az^2 + bz + c) = 0$$

Développons : $$az^3 + bz^2 + cz - 4az^2 - 4bz - 4c = 0$$

Regroupons : $$az^3 + (b - 4a)z^2 + (c - 4b)z - 4c = 0$$

En identifiant les coefficients avec ceux de l'équation $z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -8 \\ c - 4b = 24 \\ -4c = -32 \end{cases}$$

D'où : $$a = 1,\ b = -4 \text{ et } c = 8$$

On a ainsi : $$(E) : (z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$$

b. On résout : $$z^2 - 4z + 8 = 0$$

On peut calculer son discriminant Δ ou, plus élégamment, canoniser :

$$(z - 2)^2 - 4 + 8 = 0$$

$$(z - 2)^2 + 4 = 0$$

$$(z - 2)^2 - 4\mathbf{i}^2 = 0$$

$$(z - 2)^2 - (2\mathbf{i})^2 = 0$$

$$(z - 2 - 2\mathbf{i})(z - 2 + 2\mathbf{i}) = 0$$

$$z = 2 + 2\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad z = 2 - 2\mathbf{i}$$

Finalement, l'équation (E) admet les trois solutions suivantes :

$$z_0 = 4,\ z_1 = 2 + 2\mathbf{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 2 - 2\mathbf{i}$$

Déterminons la forme exponentielle de z_1 et z_2 :

$$z_1 = 2 + 2\mathbf{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}\ \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

c. Il suffit de calculer les modules suivants :

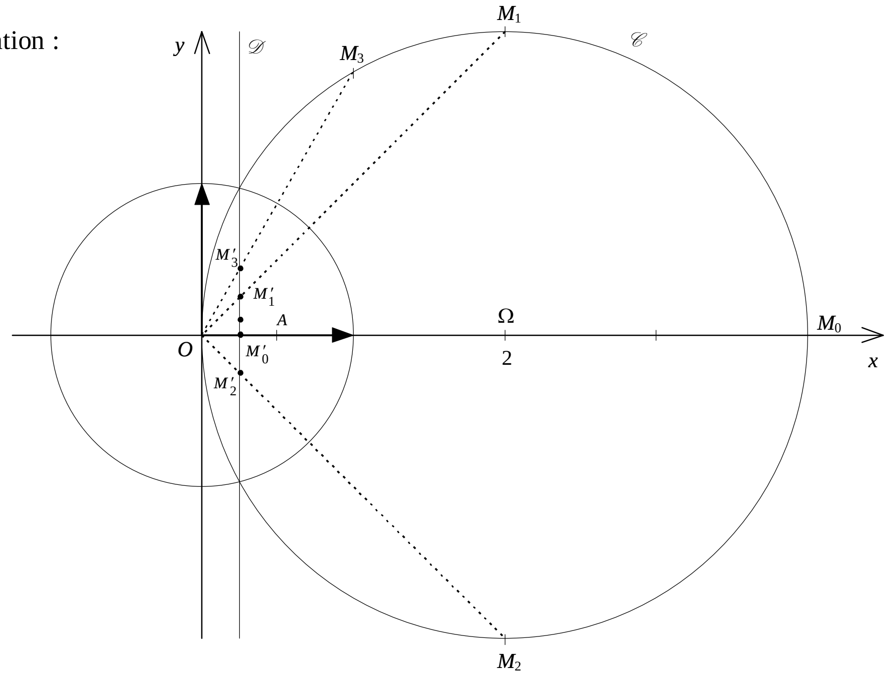
$$|z_0 - 2| = 2$$

$$|z_1 - 2| = |2\mathbf{i}| = 2$$

$$|z_2 - 2| = |-2\mathbf{i}| = 2$$

Les images respectives M_0, M_1 et M_2 de z_0, z_1 et z_2 sont donc sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω, d'affixe $\omega = 2$ et de rayon $R = 2$.

Illustration :



2. a. On a, pour M distinct de O :

$$M \text{ invariant par } f \iff z = z' \iff z = \frac{1}{\overline{z}} \overset{z \neq 0}{\iff} z\,\overline{z} = 1 \iff |z|^2 = 1 \overset{|z|>0}{\iff} |z| = 1 \iff OM = 1$$

L'ensemble des point invariants par f est le cercle "unité". (Cercle de centre O et de rayon 1)

b. Pour tout point M, distinct de O, on a :

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{z\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} \in \mathbb{R}_+^*$$

D'où : $$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = 0\ [2\pi]$$

Or, $$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) = \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}\right) - \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)\ [2\pi]$$

D'où : $$\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0\ [2\pi]$$

Ce qui prouve l'alignement des points O, M et M'.

De plus, en passant au module dans l'égalité $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$, il vient :

$$OM' = \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{OM}$$

$$OM \times OM' = 1$$

c. On a : $$z_0' = \frac{1}{\overline{z_0}} = \frac{1}{4}$$

$$z_1' = \frac{1}{\overline{z_1}} = \frac{1}{2-2\mathbf{i}} = \frac{2+2\mathbf{i}}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathbf{i}$$

$$z_2' = \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{1}{z_1} = \overline{z_1'} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathbf{i}$$

d. L'écriture complexe d'une rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' - \omega = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}(z - \omega)$$

Ici, cela donne : $$z_3 - \omega = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{6}}(z_1 - \omega)$$

$$z_3 = \left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \times 2\mathbf{i} + 2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\right) \times 2\mathbf{i} + 2 = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$$

D'où : $$z_3' = \frac{1}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}} = \frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{4}$$

e. D'après la figure, les points M_0', M_1', M_2' et M_3' sont alignés. En effet, leurs affixes respectives ont toutes une partie réelle égale à $\frac{1}{4}$. On peut raisonnablement conjecturer :

l'image du cercle $\mathscr{C}$ par f est la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$

3. a. Pour tout nombre complexe z, non nul, on a :

$$\left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'| \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\overline{z} - 2}{2\overline{z}}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z - 2| = 2$$

b. Soit A le point d'affixe $\frac{1}{2}$. Ainsi, l'équivalence ci-dessus s'interprète géométriquement par :

$$M'A = OM' \Leftrightarrow \Omega M = 2$$

C'est-à-dire, en notant $\mathscr{D}$ la médiatrice de $[OA]$

$$M' \in \mathscr{D} \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}$$

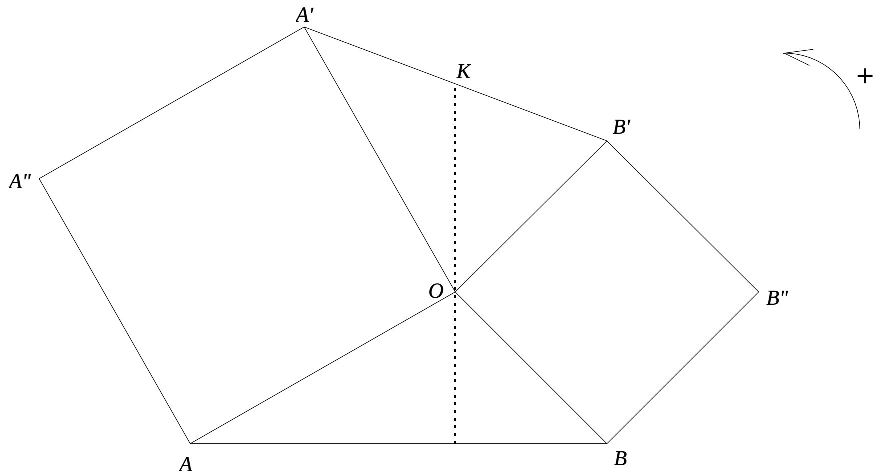
L'image $\mathscr{D}$ du cercle $\mathscr{C}$ par la transformation f est donc la médiatrice de $[OA]$.

Son équation est : $$y = \frac{1}{4}$$

Remarque : on a $f \circ f = \mathrm{Id}$ (identité du plan), donc l'image de la droite $\mathscr{D}$, par f, est le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 2 (6 points) *QCM - Étude d'une configuration classique*

Bien qu'aucune justification ne soit demandée, on donne à titre indicatif et pédagogique quelques indications.



1. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.

Une seule bonne proposition : P_3

2. Le point A' est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   Une seule bonne proposition : P_3

   L'affixe de A' est donc $a' = -\mathbf{i}a$.

3. Le point B' est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   Son affixe b' est donc : $$b' = \mathbf{i}b = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{2}}b = \mathbf{e}^{-\frac{3\mathbf{i}\pi}{2}}b$$

   Trois propositions correctes : P_1, P_2 et P_4.

4. Soit k l'affixe du milieu K de $[A'B']$. On a donc :

   $$k = \frac{a'+b'}{2} = \frac{\mathbf{i}(b-a)}{2}$$

   Le nombre complexe $\frac{k}{b-a}$ est égal à $\frac{\mathbf{i}}{2}$.

   Une seule proposition correcte : P_4

   On en déduit que la droite (OK) est perpendiculaire à (AB) et que $AB = 2OK$.

5. On a : $$\frac{b-a'}{b'-a} = \frac{b+\mathbf{i}a}{\mathbf{i}b-a} = -\mathbf{i}$$

   Comme on obtient un imaginaire pur, on en déduit que les droites (AB') et $(A'B)$ sont perpendiculaires.

   La proposition P_3 est donc correcte.

   On peut aussi raisonner géométriquement. La rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en A' et B' en B donc transforme le segment $[AB']$ en $[A'B]$. Les droites (AB') et $(A'B)$ sont donc perpendiculaires.

   La proposition P_2 est aussi correcte.

6. On a vu que : $$\frac{b-a'}{b'-a} = -\mathbf{i}$$

   En passant au module : $$\left|\frac{b-a'}{b'-a}\right| = 1$$

   $$A'B = AB'$$

   La réponse P_2 est donc correcte.

   On peut aussi raisonner géométriquement. Comme la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme $[AB']$ en $[A'B]$, ces segments ont donc même longueur.

   La proposition P_3 est aussi correcte.

Grille de réponses au QCM.

Proposition / n° question	P_1	P_2	P_3	P_4	Points obtenus (Ne pas compléter cette colonne)
1			X		
2			X		
3	X	X		X	
4				X	
5		X	X		
6		X	X		
				Total	

Exercice 3 **(6 points)** *Trois triangles équilatéraux isométriques ayant un sommet commun*

PREMIÈRE PARTIE

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$$

1. (a) $$\mathbf{j} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   (b) $$\mathbf{j}^3 = \mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi} = 1$$

   (c) $$1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = \frac{1-\mathbf{j}^3}{1-\mathbf{j}} = 0$$

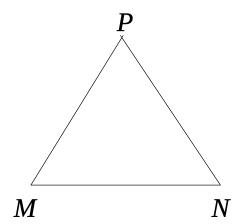
   Somme de trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

   (d) $$-\mathbf{j}^2 = 1 + \mathbf{j} = \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}$$

2. (a) Si *MNP* est équilatéral de sens direct, alors *M* est l'image de *P* par la rotation de centre *N* et d'angle $\frac{\pi}{3}$:

$$m - n = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}(p - n)$$

$$m - n = -\mathbf{j}^2(p - n)$$



Réciproquement, supposons :

$$m - n = -\mathbf{j}^2(p - n) = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}}(p - n)$$

Alors, *M* est l'image de *P* par la rotation de centre *N* et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc *MNP* est équilatéral de sens direct.

(b) Supposons *MNP* équilatéral de sens direct. D'après ce qui précède, on a :

$$m - n = -\mathbf{j}^2(p - n)$$

$$m + n(-1 - \mathbf{j}^2) + p\mathbf{j}^2 = 0$$

Et comme $-1 - \mathbf{j}^2 = \mathbf{j}$: $\quad m + n\mathbf{j} + p\mathbf{j}^2 = 0$

Réciproquement, supposons : $\quad m + n\mathbf{j} + p\mathbf{j}^2 = 0$

Alors, par le même calcul : $\quad m - n = -\mathbf{j}^2(p - n)$

Et d'après la question (a) : $\quad$ *MNP* équilatéral de sens direct

DEUXIÈME PARTIE

Par hypothèse, on a :

$$m = \frac{b+c}{2},\ n = \frac{d+e}{2} \text{ et } p = \frac{a+f}{2}$$

Calculons : $\quad 2(m + n\mathbf{j} + p\mathbf{j}^2) = b + c + \mathbf{j}(d + e) + \mathbf{j}^2(a + f) = (b + \mathbf{j}^2 a) + (\mathbf{j}d + c) + (\mathbf{j}e + \mathbf{j}^2 f)$

Or, par hypothèse : $\quad b = -\mathbf{j}^2 a,\ d = -\mathbf{j}^2 c \text{ et } f = -\mathbf{j}^2 e$

D'où : $\quad 2(m + n\mathbf{j} + p\mathbf{j}^2) = 0$

MNP est équilatéral