La calculatrice est autorisée. Les exercices sont indépendants.

Une grande part de la notation sera accordée à la rédaction et aux justifications données.

Exercice 1 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = ku_n(1-u_n)$$

1. Dans cette question, on donne $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.
   a. Si la suite (u_n) converge, calculer la valeur possible de sa limite ℓ.
   b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   c. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
   $$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$
   d. En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
2. Dans cette question, on donne $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.
   a. Si (u_n) converge, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ?
   b. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 1{,}8x(1-x)$ sur $[0 ; 1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.
   c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$
   d. En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 2 (5 points)

Répondre par OUI ou NON aux questions suivantes (les réponses OUI seront accompagnées d'une démonstration ou d'une justification, les réponses NON seront accompagnées d'un contre-exemple).

1. Soient (u_n) une suite croissante et majorée et (v_n) une suite décroissante et minorée.
   Les suites (u_n) et (v_n) ont-elles nécessairement la même limite ?
2. Soit (u_n) une suite géométrique qui converge.
   La suite (u_n) converge-t-elle nécessairement vers 0 ?
3. Soit (u_n) une suite géométrique qui diverge.
   La suite (u_n) diverge-t-elle nécessairement vers $+\infty$?
4. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites telles que pour tout n :
   $$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$
   a. Si les trois suites convergent, est-ce nécessairement vers la même limite ?
   b. Si les suites (a_n) et (c_n) convergent, la suite (b_n) converge-t-elle nécessairement ?

Exercice 3 **(6 points)**

On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, par :

$$f(x) = x + 3 + \frac{9}{x-1}$$

On désigne par C_f sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$; en $+\infty$; en 1 à gauche et en 1 à droite.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer la fonction dérivée f' de f. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$$

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer, soigneusement, la courbe C_f représentant la fonction f avec son asymptote Δ.
6. Soit k un réel.

   Discuter, selon les valeurs de k, le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = k$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 4 **(3 points)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par S_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs :

$$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n - 1)^3$$

Par exemple, $S_3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 = 153$.

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = 2n^4 - n^2$$

2. Déterminer n tel que :

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n - 1)^3 = 913276$$

<u>Formulaire pour cet exercice</u> :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

<u>Exercice 1</u> **(6 points)**

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$$

1. Dans cette question, on donne $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.

   a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\qquad f(t) = k\, t\,(1 - t)$

   Ainsi, pour tout entier n on a : $\qquad u_{n+1} = f(u_n)$

   La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que si la suite (u_n) converge, la valeur possible de sa limite ℓ vérifie l'équation "aux points fixes" :

$$\ell = f(\ell)$$

$$\ell = k\ell(1 - \ell)$$

$$\ell - k\ell(1 - \ell) = 0$$

$$\ell[1 - k(1 - \ell)] = 0$$

   Ici $k = 1$, donc : $\qquad \ell = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - (1 - \ell) = 0$

$$\ell = 0$$

   Si la suite (u_n) converge, c'est nécessairement vers 0.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\qquad u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) - u_n = -u_n^2$

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

   La suite (u_n) est donc décroissante.

   c. On considère la propriété $\wp$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

   > Remarque : puisque $u_0 = 0{,}4$ et que (u_n) est décroissante, l'inégalité $u_n \leqslant 1$ est immédiate. On peut se contenter de choisir $0 \leqslant u_n$ comme propriété $\wp(n)$.

   - On a $u_0 = 0{,}4 \in [0, 1]$ donc $\wp(0)$. La propriété $\wp$ est initialisée en 0.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

     Alors : $\qquad 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$

     En multipliant les deux encadrements ci-dessus membre à membre :

$$0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant 1$$

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

     D'où $\wp(n + 1)$.

     La propriété $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0.

   La propriété $\wp$ est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0 donc vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$.

   d. La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge. Sa limite est $\ell = 0$ (question a)

2. a. On procède comme dans la question 1.a. Cette fois-ci l'équation $f(\ell) = \ell$ donne :

$$\ell = 1{,}8\ell(1-\ell)$$

$$\ell = 0 \text{ ou } 1-\ell = \frac{5}{9}$$

$$\ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{4}{9}$$

b. La fonction f est dérivable sur [0, 1] et l'on a pour tout réel x de [0, 1] :

$$f'(x) = k - 2kx = k(1-2x)$$

Ici, k est positif d'où : $\quad f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}$

On en déduit les variations de f (sur [0, 1]) :

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>Signe de f'</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>Variations de la fonction f</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{k}{4}$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td></tr>
</table>

On a : $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{4}$$

Avec $k = 1{,}8$: $$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}45 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

c. On considère la propriété $\wp$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

- On a $u_0 = 0{,}3$ et $u_1 = 1{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}378$. On a bien :

$$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$$

D'où $\wp(0)$. La propriété $\wp$ est initialisée en 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

Comme f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0{,}45 \leqslant \frac{1}{2}$$

D'où $\wp(n+1)$.

La propriété $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

d. D'après ce qui précède, la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, donc elle converge.

D'après la question a. sa limite ℓ vaut 0 ou $\dfrac{4}{9}$

Or, (u_n) est croissante avec $u_0 = 0{,}3$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0{,}3 \leqslant u_n$$

La limite ℓ de (u_n) ne peut donc pas être 0, d'où :

$$\ell = \frac{4}{9}$$

Exercice 2 (5 points)

1. NON. Contre-exemple :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 et la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0.

Pourtant, les suites (u_n) et (v_n) ne convergent pas vers la même limite.

2. NON. Il suffit de considérer une suite géométrique de **raison $q = 1$** et de terme initial $u_0 \neq 0$.

Une telle suite (qui est en fait constante égale à u_0) converge vers u_0 et non pas vers 0.

3. NON. Il suffit par exemple de considérer la suite (u_n) définie par :

$$u_n = (-1)^n$$

C'est une suite géométrique de raison -1. Elle diverge maispas vers $+\infty$.

Autre possibilité, on choisit une suite géométrique de raison $q > 1$ mais avec un terme initial $u_0 < 0$.

Une telle suite diverge alors vers $-\infty$.

4. a. NON. Si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = 1,\ b_n = 2 \quad \text{et} \quad c_n = 3$$

Alors on obtient trois suites qui convergent vers des limites différentes.

b. NON. Si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = -1,\ b_n = \sin n \quad \text{et} \quad c_n = 1$$

Les suites (a_n) et (b_n) convergent et pourtant (b_n) ne converge pas.

Exercice 3 (6 points)

1. Il n'y a aucune difficulté dans cette question. On obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ ; \ \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

(Sur une copie, on rédigera par exemple l'étude de la limite en $+\infty$ ainsi que celle en 1^- ; les deux autres sont analogues)

Remarque : la courbe C_f n'admet pas d'asymptote horizontale (les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas finies). Par contre, elle admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$ (limites infinies à gauche et à droite de 1)

2. On étudie la limite de la différence :

$$f(x) - (x + 3) = \frac{9}{x - 1}$$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9}{x-1} = 0$, la droite Δ est bien asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. La fonction f est de la forme $f = u + \dfrac{1}{v}$ où u et v sont les fonctions définies par : $\begin{cases} u(x) = x+3 \\ v(x) = \dfrac{9}{x-1} \end{cases}$

   Donc $f' = u' - \dfrac{v'}{v^2}$. Ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-1)^2}$$

   En réduisant au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - 3^2}{(x-1)^2} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$$

4. On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
signe de $(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $(x-4)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de la dérivée f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	10	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des signes :

$x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$

$x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$

Un carré est positif ou nul

Ne pas oublier de compléter le tableau de variation avec les valeurs des limites et des éventuels extremums.

   La fonction f admet un maximum relatif en -2 : $f(-2) = -2$.

   La fonction f admet un minimum relatif en 4 : $f(4) = 10$

5. Voir ci-après.

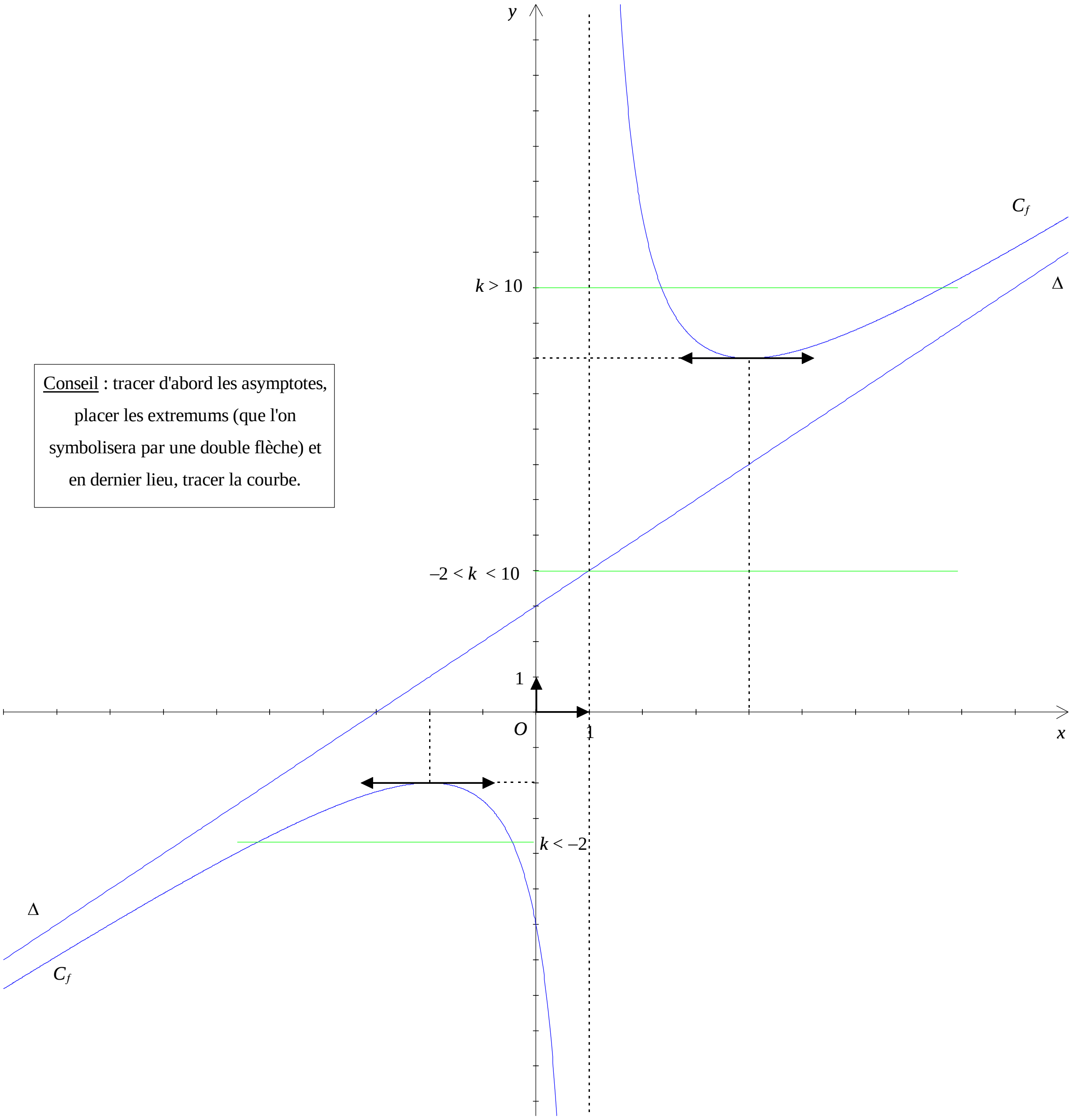
6. Si $k > 10$, alors l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions, l'une, α, dans l'intervalle $[4 ; +\infty[$, l'autre, β, dans l'intervalle $]1 ; 4]$. En effet, la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4 ; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de l'intervalle $[4 ; +\infty[$ dans l'intervalle $[10 ; +\infty[$ ce qui justifie (d'après le théorème de bijection l'existence d'une solution α dans l'intervalle $[4 ; +\infty[$. La fonction f étant continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]1 ; 4]$, elle réalise une bijection de l'intervalle $]1 ; 4]$ dans $[10 ; +\infty[$, ce qui justifie l'existence d'une seconde solution β dans l'intervalle $]1 ; 4]$.

   Si $k = 10$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $x = 4$.

   Si $k \in]-2 ; 10[$, alors l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

   Si $k = -2$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $x = -2$

   Si $k < -2$, alors on raisonne comme pour le cas $k > 10$ et l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.



Exercice 4 (3 points)

1. On considère la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\wp(n) : S_n = 2n^4 - n^2$$

- On a $S_1 = 1^3 = 2 \times 1^4 - 1^2$ d'où $\wp(1)$. La propriété $\wp$ est initialisée au rang 1.
- Soit n un certain entier naturel non nul. Supposons $\wp(n)$ pour cet entier, c'est-à-dire :

$$S_n = 2n^4 - n^2$$

Comme on a $S_{n+1} = S_n + (2n+1)^3$, on peut donc écrire :

$$S_{n+1} = 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3$$
$$S_{n+1} = 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$$
$$S_{n+1} = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$

Rappel : on démontre en développant que :
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
et
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Par ailleurs :

$$2(n+1)^4 - (n+1)^2 = 2n^4 + 8n^3 + 12n^2 + 8n + 2 - n^2 - 2n - 1 = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$

D'où : $$S_{n+1} = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$$

D'où $\wp(n+1)$

La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 1.

Conclusion : la propriété $\wp$ est initialisée en 1 et héréditaire à partir du rang 1, elle est donc vraie pour tout entier n non nul. D'où le résultat.

2. On résout l'équation : $$2n^4 - n^2 = 913276$$

C'est un équation "bicarrée", on pose $X = n^2$ ainsi :

$$2X^2 - X - 913276 = 0$$

On trouve, tous calculs faits : $X = 676$ ou $X = -\frac{1351}{2}$

Or, X est un entier strictement positif, donc : $X = 676$

Comme n est un entier naturel, on en déduit : $n = \sqrt{676} = 26$