Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A

1. Soit x un éel supérieur ou égal à 1.
   Calculer en fonction de x l'intégrale $\displaystyle\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1~;~+\infty[$, on a : $2-t \leqslant \dfrac{1}{t}$.
3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leqslant \ln x.$$

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2}$.

Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1~;~4]$. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. **a.** Démontrer que $\displaystyle\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = 0$.

   b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.
2. On note (D) le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1~;~4]$.
   En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de (D) en unités d'aire.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

$\left(\mathrm{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.

Soit A le point d'affixe $1+\mathrm{i}$.

Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.

   a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \dfrac{1}{2}(x+y)$ et $y' = \dfrac{1}{2}(x+y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite $(\mathrm{O}A)$.

   b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

   c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}A}$ sont orthogonaux.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r, M_2 le point d'affixe $z_2 = \overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $\mathrm{O}M_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4+\text{i}$, placer les points M, M_1, M_2, M_3.

b. Exprimer z_1 en fonction de z, puis z_3 en fonction de z.

c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d. Vérifier que $z' - z = \dfrac{1}{2}iz_3$.

En déduire que $MM' = \dfrac{1}{2}\text{O}M_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 e tM_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \dfrac{1}{2}\text{O}M$.

Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'\text{O}M}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

$\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).

On considère le point A d'affixe $z_A = 1+\text{i}$.

On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{u}\right)$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3.

On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.
2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.
4. **a.** Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.

   b. Montrer que $z_B = -3\text{i}z_A$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}A}, \overrightarrow{\text{O}B}\right)$.
5. Soient M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s. Montrer que la droite $(\text{O}P)$ est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose $C = s(B)$. Montrer que P est le milieu de $[BC]$.
2. **a.** Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.

   b. Montrer que l'image de la droite $(\text{O}P)$ par s est la droite (OM).

   c. Que représente le point M pour le triangle $\text{O}BP$? Justifier.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

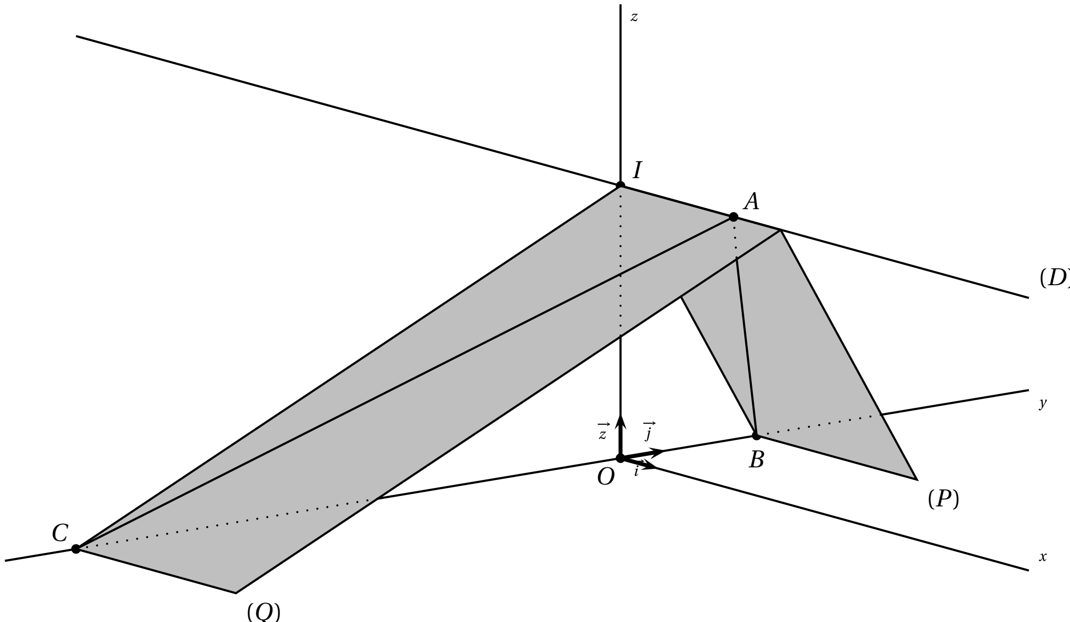
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points $A(3\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et $I(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$, et l'on appelle (D) la droite passant par A et I.

On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6=0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12=0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est

$$x+4y+2z-12=0.$$

5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).
   Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.
6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte aux questions 1 et 2 rapporte 0,5 point et à la question 3 rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P1 et P2, qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.
Une seule pièce de type P1 et une seule pièce de type P2 sont nécessaires par boîte.
L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement S1 et S2.
Le sous-traitant S1 produit 80 % des pièces de type P1 et 40 % de pièces de type P2.
Le sous-traitant S2 produit 20 % des pièces de type P1 et 60 % de pièces de type P2.

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P1 et P2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.
   Il tire une pièce au hasard.
   a. La probabilité que ce soit une pièce P1 est

   0,8   0,5   0,2   0,4   0,6

   b. La probabilité que ce soit une pièce P1 et qu'elle vienne de S1 est

   0,1   0,2   0,3   0,4   0,5

   c. La probabilité qu'elle vienne de S1 est

   0,2   0,4   0,5   0,6   0,8

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 est :

0,1588   0,2487   0,1683   0,0095

b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P1 et P2 est :

0,5000   0,2513   0,5025

c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\dfrac{357}{995}$ $\dfrac{103}{199}$ $\dfrac{158}{995}$

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P1 et P2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P1	P2
S1	0,2	0,25
S2	0,1	0,125

On rappelle que si X, durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P1 fabriquée par S1 dure moins de 5 ans est :

0,3679   0,6321

FIG. 1 – Annexe (à rendre avec la copie)