

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.*

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.**

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$.
Soit A le point de coordonnées $(1, 11, 7)$.

Proposition 1 :

« le point H , projeté orthogonal de A sur (P) , a pour coordonnées $(0, 2, 1)$ ».

- 2) On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2 - 2y$.
On appelle u la solution de (E) sur \mathbf{R} vérifiant $u(0) = 0$.

Proposition 2 : « on a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ».

- 3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 7$ ».

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).

Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

- 1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r .
 - a) Déterminer une écriture complexe de r .
 - b) Montrer que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
 - c) Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.
 - d) Placer les points A, B et C.

- 2) Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 2.
 - a) Montrer que l'affixe de D est $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Placer le point D.
 - b) Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

- 3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h .
 - a) Déterminer une écriture complexe de h .
 - b) Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$. Placer le point E.

- 4)
 - a) Calculer le rapport $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.
 - b) En déduire la nature du triangle CDE.

EXERCICE 3 (5 points)

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.

Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1) On appelle :

E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;

E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;

E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

- Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - Montrer que la probabilité de l'événement ($X = 2$) est égale à 0,031 et que celle de l'événement ($X = 3$) est égale à 0,002.
 - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Calculer l'espérance de X .
- 2) Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « le joueur perd la n -ième partie », \overline{E}_n l'événement contraire, et on note p_n la probabilité de l'événement E_n .
- Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E}_n \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n .
 - En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.
- 3) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.
- Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n .
 - Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 (7 points)

1) Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbf{R} et est égale à sa fonction dérivée ;
- $e^0 = 1$;
- pour tout réel x , on a $e^x > x$.
- Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A, +\infty[$ où A est un réel positif.

Si pour tout x de $[A, +\infty[$ $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2) On appelle f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe C est représentée en annexe page 6.

a) Montrer que f est positive sur $[0, +\infty[$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C .

c) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0, +\infty[$.

3) On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

a) Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}}$.

c) Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0, +\infty[$.

d) Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4) Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n \geq 0,5$.

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie.

EXERCICE 4

