

Baccalauréat S Pondichéry 1^{er} avril 2004

Exercice 1

3 points

1. Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2 - u_n} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 . On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.
- Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur \mathbb{N} par $w_n = \frac{n}{n+1}$.
- À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

- Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.
- Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Exprimer S_n en fonction de n .

Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

4 points

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1 , U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans l'urne U_1 , deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3 , et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante :

le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1 , note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2 , note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3 , note sa couleur et la remet dans l'urne U_3 .

On désigne par A, B, C, et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1. »

B : « Le dé amène un multiple de trois. »

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »

N : « La boule tirée est noire. »

1. Le joueur joue une partie.

- Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.
- Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.
- Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$.

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.

Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3} , la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 3

8 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1.$$

1.
 - a. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b. Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur \mathbb{R} .
2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} , dont l'une dans l'intervalle $[1; +\infty[$, qui sera notée α .
Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur \mathbb{R} et le présenter dans un tableau.

Partie B : Étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur la feuille annexe page 5 sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g .

Les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) sont notées \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et admettent en ce point la même tangente.
 - a. Démontrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) - g(x) = \frac{(2x + 1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$ où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.
 - b. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur \mathbb{R} .
 - c. En déduire la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
2.
 - a. Montrer que la fonction h définie sur \mathbb{R} par

$$h(x) = (-2x - 3)e^{-x} - \ln(x^2 + x + 1)$$

est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$.

- b. En déduire l'aire \mathcal{A} , exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.

Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.

Exercice 4 : enseignement obligatoire**5 points****Partie A**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

Les solutions seront notées z' et z'' , z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.

Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment [OB].
 - a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle $AO'B'$?
 - b. Calculer l'affixe du vecteur \vec{AI} .
Montrer que l'affixe du vecteur $\vec{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3} - i$.
 - c. La conjecture émise à la **question a.** est-elle vraie ?

Exercice 4 : exercice de spécialité**5 points**

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère (O, \vec{j}, \vec{k}) .
On note \mathcal{C} le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle \mathcal{C} .
2. On nomme \mathcal{S} la sphère engendrée par la rotation du cercle \mathcal{C} autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).
 - a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.
 - b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère \mathcal{S} .
Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.
 - c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.
3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$.
Dans P_1 , l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.
4. Soit $M(x, y, z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

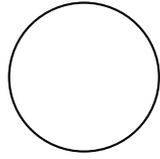


Figure 1

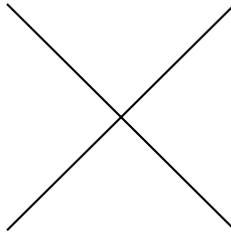


Figure 2

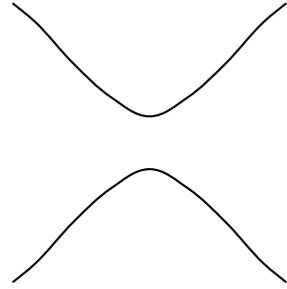


Figure 3

Exercice 3

