

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie septembre 2004

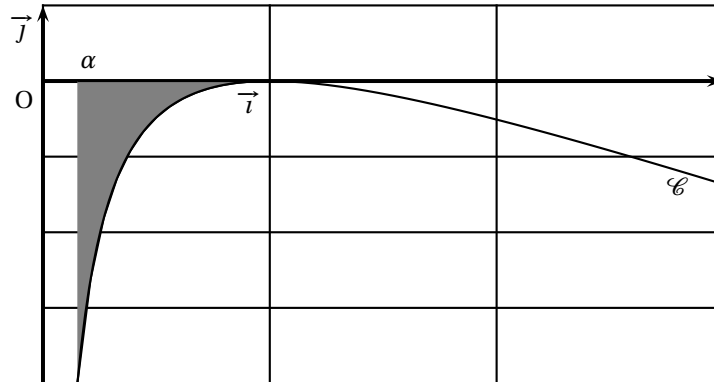
EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de

$$N(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x.]$$

- b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.
- c. En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée maximale.
2. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0 ; 1[$.
- a. Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).
- b. Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.
3. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1 ; 2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

- a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1 ; 2]$, la double inégalité
- $$0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1.$$
- b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[1 ; 2]$.
4. En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
- b. Déterminer la valeur exacte de ℓ .

EXERCICE 2

5 points

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point M du plan d'affixe z on considère les points M' et M'' d'affixes respectives

$$z' = z - 2 \quad \text{et} \quad z'' = z^2.$$

1.
 - a. Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M$.
 - b. Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M'$.
2. Montrer qu'il existe exactement deux points M_1 et M_2 dont les images M'_1, M''_1, M'_2 et M''_2 appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.
3. On pose $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
 - a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z'' - z}{z' - z}$.
 - b. En déduire l'ensemble E des points M du plan pour lesquels les points M, M' et M'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.
4. On pose $z = \sqrt{3}e^{i\theta}$ où $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - a. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z ainsi définis et chacun des ensembles Γ' et Γ'' des points M' et M'' associés à M .
 - b. Représenter Γ, Γ' et Γ'' sur la figure précédente.
 - c. Dans cette question $\theta = \frac{\pi}{6}$. Placer le point M_3 obtenu pour cette valeur de θ , et les points M'_3 et M''_3 qui lui sont associés. Montrer que le triangle $M_3M'_3M''_3$ est rectangle. Est-il isocèle?

EXERCICE 2

5 points

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1 + i, 3 + 2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} - 1 + i(1 + \sqrt{2}).$$

- a. Calculer les affixes des points $A' = f(A)$ et $C' = f(C)$.
- b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.
- c. Placer les points A, B et C puis construire le point $B' = f(B)$.
2.
 - a. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
 - b. Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe $z'' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$.
3.
 - a. Soit M_0 le point d'affixe $2 - 4i$.
Déterminer l'affixe du point $M''_0 = g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AM''_0}$ sont orthogonaux.

- b.** On considère un point M d'affixe z . On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x + 3y = -2$.
- c.** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 3y = -2$.
- d.** En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6 ; 6]$ tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

EXERCICE 3**6 points****Commun à tous les candidats**

On donne dans le plan trois points A , B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres -2 , -1 , 0 , 1 , 2 et 3 .

Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1 .

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le canon de U et b celui lu sur le carton de V .

- 1.** Justifier que les points pondérés (A, a) , (B, b) et $(C, 4)$ admettent un barycentre. On le note G .
- 2.**
 - a.** Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
 E_1 « G appartient à la droite (BC) » ;
 E_2 « G appartient au segment $[BC]$ ».
 - b.** Montrer que la probabilité de l'évènement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\frac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.
- 3.** Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question **1.**.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E_3 .
 - a.** Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4 .
 - b.** Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à $0,999$.