**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S France septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

## Exercice 1 — 4 points

**Commun à tous les candidats**

**1.** Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

**a.** Déterminer les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que l'on ait, pour tout $x > 1$ :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

**b.** Trouver une primitive $G$ de $g$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

**2.** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Trouver une primitive $F$ de $f$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

**3.** En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} \ln x \,\mathrm{d}x.$$

On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$, avec $p$ et $q$ rationnels.

## Exercice 2 — 6 points

**Commun à tous les candidats**

*L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.*

Le but de ce problème est d'étudier, pour $x$ et $y$ éléments distincts de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

**1.** Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$.

**2.** Soit $h$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $h$ est donnée en annexe ; $x_0$ est l'abscisse du maximum de la fonction $h$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

**a.** Rappeler la limite de la fonction $h$ en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction $h$ en 0.

**b.** Calculer $h'(x)$, où $h'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $h$ ; retrouver les variations de la fonction $h$.
Déterminer les valeurs exactes de $x_0$ et de $h(x_0)$.

**c.** Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

**3.** Soit $\lambda$ un élément de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$.
Prouver l'existence d'un unique nombre réel $a$ de l'intervalle $]1\,;\,\mathrm{e}[$ et d'un unique nombre réel $b$ de l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.
Ainsi le couple $(a,\, b)$ est solution de (E).

**4.** On considère la fonction $s$ qui, à tout nombre réel $a$ de l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}[$, associe l'unique nombre réel $b$ de l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de $a$).
Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes

**a.** Quelle est la limite de $s$ quand $a$ tend vers 1 par valeurs supérieures?

**b.** Quelle est la limite de $s$ quand $a$ tend vers e par valeurs inférieures?

**c.** Déterminer les variations de la fonction $s$. Dresser le tableau de variations de $s$.

**5.** Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

## EXERCICE 3 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.
Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments KI et K2.
L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ ;

- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

### Partie A

**1.** Soit une particule au hasard.
Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A1: « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,
A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,
B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,
B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,
C1 : « la particule entre dans K1 »,
C2 : « la particule entre dans K2 ».

**2.** On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.
Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.
Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

**Partie B**

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0{,}75$.

Plus généralement, si $t$ est exprimé en années, on a $p(t) = 0{,}75\text{e}^{-\lambda t}$, où $\lambda$ est une constante réelle.

La demi-vie[1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer $\lambda$ ; on prendra une valeur approchée décimale à $10^{-5}$ près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de $t$ pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

## EXERCICE 4 — 5 points

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4\text{i} \qquad \text{et} \qquad b = 4\sqrt{3} + 4\text{i}.$$

   **a.** Écrire $a$ et $b$ sous forme exponentielle.

   **b.** Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
   Déterminer l'affixe $d$ du point D.
4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; −1), (D ; + 1), (B ; + 1).

   **a.** Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6\text{i}$.

   **b.** Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

   **c.** Montrer que les points C, D et G sont alignés.

   **d.** Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.

5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

## EXERCICE 4 — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

*L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.*

1. temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note $\Gamma$ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de $\Gamma$ ; $B$ est un point du cercle $\Gamma$ distinct des points A et C.

Le point $D$ est construit tel que le triangle $BCD$ soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Le point $G$ est le centre de gravité du triangle $BCD$.

Les droites (A$B$) et (C$G$) se coupent en un point $M$.

**Partie A**

1. Placer les points $D$, $G$ et $M$ sur la figure de la feuille annexe.
2. Montrer que les points O, $D$ et $G$ appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point $G$ est le milieu du segment [C$M$].
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe $s$ de centre C transformant $B$ en $M$.

**Partie B**

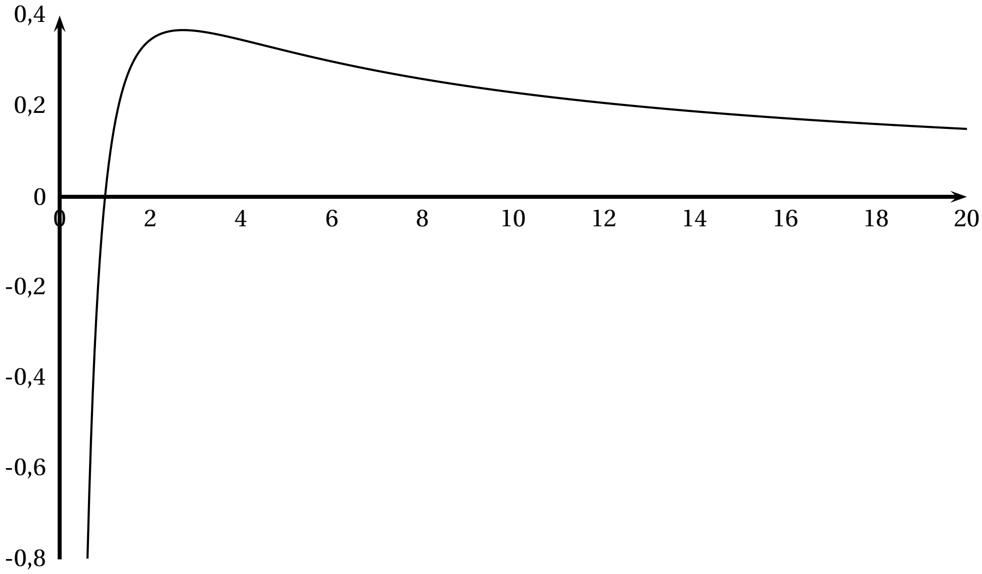
Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives $-1$ et 1.

Soit $E$ le point construit pour que le triangle AC$E$ soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{A}E}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

1. Calculer l'affixe du point $E$ et construire le point $E$ sur la feuille annexe.
2. Soit $\sigma$ la similitude directe d'expression complexe $z' = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$.
   Déterminer les éléments caractéristiques de $\sigma$ et en déduire que $\sigma$ est la similitude réciproque de $s$.
3. Montrer que l'image $E'$ du point $E$ par $\sigma$ a pour affixe $-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point $E'$ appartient au cercle $\Gamma$.
4. On note $\mathscr{C}$ le lieu des points $M$ lorsque le point $B$ décrit le cercle $\Gamma$ privé des points A et C.
   Montrer que le point $E$ appartient à $\mathscr{C}$.
   Soit O$'$ l'image du point O par la similitude $s$. Démontrer que le point O$'$ est le centre de gravité du triangle AC$E$.
   En déduire une construction de $\mathscr{C}$.

## ANNEXE DE L'EXERCICE 2

À rendre avec la copie




Courbe $\mathscr{C}$, obtenue à l'aide d'un traceur de courbes