Baccalauréat S Asie juin 2004

• **L'utilisation d'une calculatrice n'est pas autorisé**

• L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies.

• Le candidat doit traiter les **QUATRE** exercices.

EXERCICE 1 — 3 points

Commun à tous les candidats

À chacune des trois affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX ». Aucune justification n'est demandée.

Données	Affirmations	Réponses
f est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\text{e}^x}$, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère du plan.	La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$.	
G est le barycentre du système de points pondérés {(A ; −1), (B ; 1), (C ; 4)}	L'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + 4\overrightarrow{M\text{C}}$, est une homothétie de rapport -3.	
$f(x) = x\sin 3x$	Les solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}x$ sont : 0 ; $\dfrac{\pi}{18} + 2k\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{5\pi}{18} + 2k'\dfrac{\pi}{3}$, k et k' sont des entiers relatifs.	

Le barème est le suivant :

- Réponse exacte : 1 point.
- Réponse fausse : −0,5 point.
- Absence de réponse : 0 point.
- La note attribuée à l'exercice ne peut être négative.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$, unité graphique 1 cm.

Soit A le point d'affixe 3i. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3\text{i}z - 7}{z - 3\text{i}}.$$

1. Recherche des points invariants par f.

a. Développer $(z - 7\text{i})(z + \text{i})$.

b. Montrer que f admet deux points invariants B et C dont on précisera les affixes et qu'on placera sur un dessin.

2. On appelle Σ le cercle de diamètre [BC]. Soit M un point quelconque de Σ, distinct de B et de C, soit M' son image par f.

a. Justifier que l'affixe z de M vérifie : $z = 3\text{i} + 4\text{e}^{\text{i}\theta}$ où θ est un nombre réel.

b. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de θ et en déduire que M' appartient aussi à Σ.

c. Démontrer que $z' = -\overline{z}$ et en déduire, en la justifiant, une construction géométrique de M'.

3. On considère un cercle de centre A, de rayon $r > 0$. Déterminer l'image de ce cercle par f.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

a. Montrer que si $n \geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geqslant 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de **2. c.** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On appelle $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$ et $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $3x + y - z = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants en une droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \alpha \\ y & = & 2\alpha + 5 \\ z & = & 5\alpha + 5 \end{array}\right. \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier précisément vos réponses :

- Affirmation 1 : $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{R}$ d'équation : $-5x + 5y - z = 0$.

Soit $\mathcal{D}'$ la droite de l'espace de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3\beta \\ y & = & 1 + \beta \\ z & = & 2 + 2\beta \end{array}\right. \quad \text{où } \beta \text{ est un nombre réel.}$$

- Affirmation 2 : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

EXERCICE 4 **8 points**

Commun à tous les candidats

I Première partie Étude d'une fonction f

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $\text{I} = \left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par

$$f(x) = \ln(1+2x).$$

1. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\frac{1}{2}$.
3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par $g(x) = f(x) - x$.

   a. Étudier les variations de g sur l'intervalle I.
   b. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et une autre, notée β, appartenant à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   c. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I.

4. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0\,;\,\beta[$.

II Deuxième partie Étude d'une suite récurrente

On appelle $(u_n)_{\geqslant 0}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à $]0\,;\,\beta[$.
2. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$ est croissante.
3. Justifier que la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$ est convergente.

III Troisième partie Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant \frac{2}{3}$.
2. Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_{u_0}^{\beta} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3}\left(\beta - u_n\right)$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\left(\beta - u_n\right)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $0 \leqslant \beta - u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   c. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$?