

Baccalauréat La Réunion série S juin 2003

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.

Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c et d.

Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.

Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

a. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{4}$.

b. $P(X = 0) = \frac{1}{2^{2n}}$

c. $P(X < 5) = 1 - P(X > 5)$

d. $E(X) = 0,75n$

2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée.

Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :

- Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % sont négatifs.
- Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs).

Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.

On note M l'évènement : **l'individu est malade** et T l'évènement : **le test pratiqué est positif**.

a. $P_M(T) + P_{\overline{M}}(T) = 1,01$.

b. $P_M(T) + P_{\overline{M}}(T) = P(T)$

c. $P(T) = 2,97 \cdot 10^{-2}$

- d. Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.

3. La durée d'attente en seconde à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
 $f(t) = e^{-0,01t}$

b. Pour tout réel t positif, $P(Y \leq t) = 1 - e^{-0,01t}$

- c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.

- d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

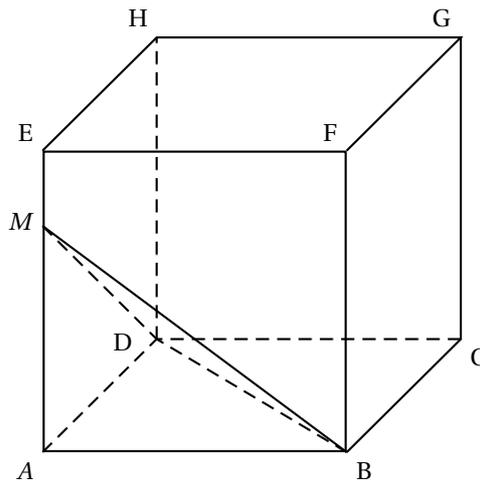
Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite $[AE)$ défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre $ABDM$ en fonction de a .
2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(M; a^2), (B; 1), (D; 1)\}.$$

- a. Exprimer \overrightarrow{BK} en fonction de \overrightarrow{BM} et de \overrightarrow{BD} .
 - b. Calculer $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.
 - c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
 - d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM .
3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?
 4. a. Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.
b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra 1 cm, pour unité graphique.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3}).$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i . En déterminer le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.

Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M_0})$.

3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n .
- Placer les points Ω , M_0 , M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .
 - Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n , l'égalité :

$$z_n - i = 2^n e^{i \frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i).$$
 - Pour tout entier naturel n , calculer ΩM_n , puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.
4. **a.** On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5; -3)$ est solution, résoudre l'équation (E).
- b.** Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\text{Im}(z) = 1$ et $\text{Re}(z) = 0$.
Caractériser géométriquement Δ et le représenter.
Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur \vec{u} . Préciser son plus petit élément.

PROBLÈME**9 points****Communs à tous les candidats.**

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = e^x$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0; +\infty[$.

- Démontrer que la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de (E).
 - Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0; +\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0; +\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.
 - En déduire toutes les solutions définies sur $]0; +\infty[$ de l'équation (E).
- Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x} e^x.$$

- Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.
 - Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation $f'_k(x) = 0$.
3. On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes \mathcal{C}_{-1} , $\mathcal{C}_{-0,25}$, $\mathcal{C}_{-0,15}$ et \mathcal{C}_0 .
En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $\mathcal{A}(a) = \int_a^{a+1} \frac{e^x}{x} dx$.

a. Interpréter géométriquement $\mathcal{A}(a)$.

b. On désigne F une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

En remarquant que $\mathcal{A}(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variations de la fonction qui à tout réel a élément de $]0; +\infty[$ associe le réel $\mathcal{A}(a)$.

- c. On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes \mathcal{C}_0 et (Ox) soit minimale. Comment doit-on procéder?

Annexe du problème

