

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour  $n$  scooters franchissant le carrefour durant une année ( $n$  est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire  $S_n$  qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de  $S_n$  notée  $E(S_n)$  est égale à 10. Soit  $p$  la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer  $p$ , puis justifier l'égalité  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$  où  $k$  est un entier naturel tel que  $0 \leq k \leq n$ .

2. a. Établir l'égalité  $\ln [P(S_n = 0)] = -10 \times \frac{\ln\left(1 - \frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$  où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien ; en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0) = e^{-10}$ .

- b. Démontrer que  $P(S_n = k + 1) = P(S_n = k) \times \frac{n - k}{n - 10} \times \frac{10}{k + 1}$ , où  $k$  est un entier naturel tel que  $0 \leq k \leq n - 1$ .

- c. Démontrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}$  pour  $0 \leq k \leq n$ , alors on a également  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k + 1) = e^{-10} \frac{10^{k+1}}{(k + 1)!}$  pour  $0 \leq k + 1 \leq n$ .

- d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel  $k$  que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}$  où  $k$  est un entier naturel tel que  $0 \leq k \leq n$ .

3. On suppose que le nombre  $n$  est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que  $e^{-10} \frac{10^k}{k!}$  est une approximation acceptable de  $P(S_n = k)$ . Utiliser cette approximation pour calculer à  $10^{-4}$  près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

T.S.V.P.

## EXERCICE 2

5 points

## Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ; on considère les points  $A(3; 0; 10)$ ,  $B(0; 0; 15)$  et  $C(0; 20; 0)$ .

1.
  - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
  - b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point  $E(9; 0; 0)$ .
  - c. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.
  - a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.
  - b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).
  - c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne
 
$$20x + 9y + 12z - 180 = 0.$$
  - d. Montrer que le système
 
$$\begin{cases} x & = & 0 \\ 4y - 3z & = & 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 & = & 0 \end{cases}$$
 a une solution unique. Que représente cette solution?
  - e. Calculer la distance OH, en déduire que  $EH = 15$  et l'aire du triangle EBC.
3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en 2. c.?

## EXERCICE 2

5 points

## Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.
  - a. Soit  $p$  un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres  $p$ ,  $p + 10$  et  $p + 20$ , et l'un seulement est divisible par 3.
  - b. Les entiers naturels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.
2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs  $(u, v, w)$  tels que

$$3u + 13v + 23w = 0.$$

- a. Montrer que pour un tel triplet  $v \equiv w \pmod{3}$
- b. On pose  $v = 3k + r$  et  $w = 3k' + r$  où  $k, k'$  et  $r$  sont des entiers relatifs et  $0 \leq r \leq 2$ .  
Montrer que les éléments de E sont de la forme :

$$(-13k - 23k' - 12r, 3k + r, 3k' + r).$$

- c. l'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation  $3x + 13y + 23z = 0$ .  
Déterminer l'ensemble des points  $M$  à coordonnées  $(x, y, z)$  entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

## PROBLÈME

11 points

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction numérique  $f_n$  par :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et pour } n \text{ entier naturel non nul } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}.$$

On note  $\Gamma_n$ , la courbe représentative de  $f_n$ , dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique : 4 cm.

On désigne par  $I_n$  l'intégrale  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ .

### Partie A

1.
  - a. Étudier les limites de  $f_1$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Quelle est la conséquence graphique de ces résultats?
  - b. Étudier les variations de  $f_1$ .
  - c. Tracer la courbe  $\Gamma_1$ .
  - d. Calculer  $I_1$ .
2.
  - a. Étudier les limites de  $f_3$  en  $+\infty$ .
  - b. Étudier les variations de  $f_3$ .
  - c. Tracer la courbe  $\Gamma_3$  sur le même dessin qu'au 1. c..
3. Calculer  $I_1 + I_3$ . En déduire la valeur de  $I_3$ .
4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ .

### Partie B

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique : 4 cm.

1.
  - a. Étudier les limites de  $f_0$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - b. Étudier les variations de  $f_0$ .
2. Soit  $(a_n)$  la suite définie, pour  $n$  entier naturel non nul, par  $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+t^2} dt$ .
  - a. Interpréter graphiquement  $a_n$ .
  - b. Montrer que la suite  $(a_n)$  est croissante.
  - c. Montrer que pour tout réel  $t$  :  $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$  et en déduire que  $a_1 \leq 1$ .
  - d. Montrer que pour tout réel  $t$  non nul :  $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$  et en déduire que pour tout entier naturel non nul,  $\int_1^n \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1 - \frac{1}{n}$ .
  - e. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $a_n \leq 2$ . Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite  $(a_n)$ ?

**T.S.V.P.**

**Partie C**

Soit  $F$  la fonction telle que :

$$F(0) = 0, F \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. On pose, pour tout  $x$  de  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $H(x) = F[\tan(x)]$ .
  - a. Calculer  $H(0)$ .
  - b. Montrer que  $H$  est dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  et calculer  $H'(x)$ .
  - c. En déduire que, pour tout  $x$  de  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $H(x) = x$ .
  - d. Montrer que  $F(1) = \frac{\pi}{4}$ .
2. On pose, pour tout  $x$  réel positif ou nul,  $k(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$ .
  - a. Montrer que la fonction  $k$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et déterminer  $k'(x)$ .
  - b. En déduire la valeur de  $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right)$ .