Baccalauréat série S Amérique du Nord juin 2003

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule tant exacte.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, page 5, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0, t[$, notée $p([0, t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est telle que $p([0, t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1. Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t, +\infty[)$ est :

   a. $1 - e^{-\lambda t}$ **b.** $e^{-\lambda t}$ **c.** $1 + e^{-\lambda t}$

2. La valeur de t pour laquelle on a $p([0, t[) = p([t, +\infty[)$ est :

   a. $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ **b.** $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ **c.** $\dfrac{\lambda}{2}$

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :

   a. $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ **b.** $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ **c.** $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

   a. $p([1, +\infty[)$ **b.** $p([3, +\infty[)$ **c.** $p([2 ; 3[$

   Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0{,}2$.

5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

   a. 0,5523 **b.** 0,5488 **c.** 0,4512

6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable alatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.

   La valeur la plus proche de la probabilité de l'évènement « $X = 4$ » est :

   a. 0,5555 **b.** 0,8022 **c.** 0,1607

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$, $z_2 = -4 - i$.

1. **a.** Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

   b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1-i}{2}z + \dfrac{-3+i}{2}$.

c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

d. On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'.
Vérifier la relation : $\omega - z' = \text{i}(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}, est défini par $\text{A}_{n+1} = S(\text{A}_n)$ et on pose $u_n = \text{A}_n\text{A}_{n+1}$.

a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4. **a.** Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega\text{A}_n\text{A}_{n+1}$.

b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n :
si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

Exercice 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_\text{A} = -1 + \text{i}\sqrt{3}$, $z_\text{B} = -1 - \text{i}\sqrt{3}$ et $z_\text{C} = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.

2. **a.** Vérifier que : $\dfrac{z_\text{B} - z_\text{C}}{z_\text{A} - z_\text{C}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.
Tracer le cercle Γ_1.

3. **a.** Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z+\overline{z}) + z\overline{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon.
Construire Γ_2.

b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.

b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.

5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.
On posera : $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.

a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.

b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(\mathrm{C})$, image du point C par la rotation r ; en déduire que le point $r(\mathrm{C})$ appartient un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{x})$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On rappelle que : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. En déduire que la courbe admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\ +\infty[$.

b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(\mathrm{e}^{x})$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B : comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le sens de variations de la fonction F.

2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{t}} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{1+\mathrm{e}^{t}}$ et calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

c. Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} (1) & F(x) & = & x - \ln(1+\mathrm{e}^{x}) - f(x) + 2\ln 2. \\ (2) & F(x) & = & \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) - f(x) + 2\ln 2. \end{array}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} [F(x) - x]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C : étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k} \ln(1 + \mathrm{e}^{k}).$$

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n.

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. **a.** Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Comparer u_n et $F(n)$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Annexe à rendre avec la copie

Réponses à l'exercice 1 (mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)

	(a)	(b)	(c)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			