Baccalauréat S Asie juin 2002

Exercice 1 **5 points**

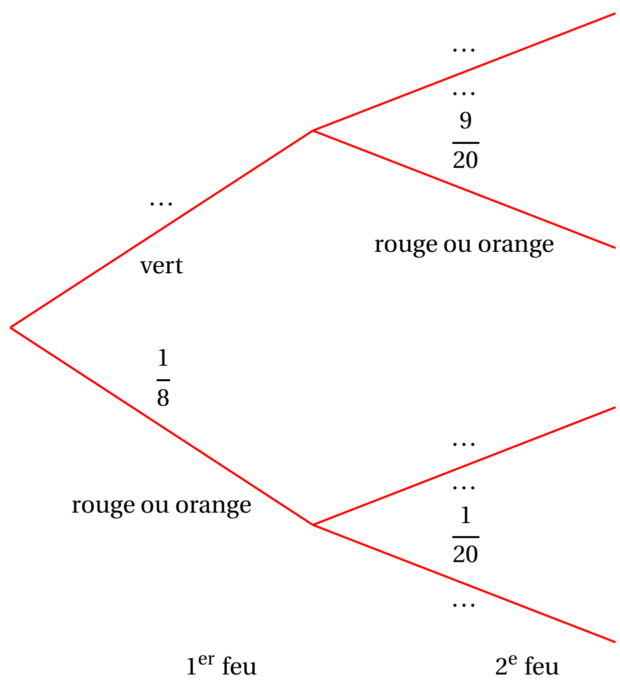
Commun à tous les candidats

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement « Amélie est arrêtée par le n^{e} feu rouge ou orange » et $\overline{\mathrm{E}}_n$, l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.
Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{\mathrm{E}}_n$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$.
On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $(n+1)^{\text{e}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n^{\text{ième}}$ feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$.
- la probabilité que le $(n+1)^{\text{e}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n^{\text{ième}}$ feu est vert, est égale à $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{E}_{n+1})$ et $p_{\overline{\mathrm{E}}_n}(\mathrm{E}_{n+1})$.

b. En remarquant que $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup \left(E_{n+1} \cap \overline{E}_n\right)$, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n.$$

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n, quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement obligatoire

1. Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, 4i, $-2+3i$ et $1-i$.

a. Placer les points A, B, C et D dans le plan.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

2. On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$$z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0 \quad (1) \qquad \text{et} \qquad z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i = 0 \quad (2)$$

a. Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1, et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.

b. Développer $(z-3)(z+2-3i)$, puis $(z-4i)(z-1+i)$.

c. En déduire les solutions de l'équation :

$$\left(z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i\right)\left(z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i\right) = 0.$$

d. Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de z_0.

e. Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixes z_0^n soient sur la droite d'équation $y = x$.

3. On appelle f l'application qui au point M, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i.$$

a. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} & = & \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{array}\right. , n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $\left(x_n,\, y_n\right)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :

a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. **a.** Montrer, par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.

b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.

PROBLÈME **10 points**

Partie 1

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}^*$ par

$$u(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|.$$

1. Étudier les variations de la fonction u sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de u.

2. Étudier les limites de u en 0, et en $+\infty$.

3. On considère l'équation $u(x) = 0$.

a. Montrer qu'elle n'admet qu'une seule solution sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$ et en déduire qu'elle est la seule sur $\mathbb{R}^*$; cette solution sera notée α.

b. Donner un encadrement de α par deux nombres rationnels de la forme $\frac{n}{10}$ et $\frac{n+1}{10}$, avec n entier.

4. En déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Partie 2

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\, \vec{\imath}\right)$.

1. Étudier les limites de f en 0, en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Pour tout x réel, déterminer le nombre dérivé $f'(x)$.

3. En utilisant les résultats déjà établis, donner les variations de la fonction f et le tableau de variations de f.

4. **a.** Démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

b. En utilisant l'encadrement de α trouvé à la **partie 1) 3)**, prouver que $1,6 < f(\alpha) < 2,1$.
La construction de $\mathscr{C}$ n'est pas demandée.

Partie 3

Soit M le point de coordonnées (x, y) et M' le point de coordonnées (x', y') dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}\right)$, où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

1. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

2. **a.** Démontrer qu'une équation de la courbe Γ à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe $\mathscr{C}$? est la suivante : $y = -2x - \dfrac{\ln|x|}{x^2}$.

b. Étudier la position relative des courbes Γ et $\mathscr{C}$.

Partie 4

On considère un réel m supérieur ou égal à 1.

1. On note $A(m)$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^m \left[2x - f(x)\right] \text{d}x$. Calculer $A(m)$. (On utilisera une intégration par parties.)

2. Déterminer, si elle existe, la limite de $A(m)$ quand m tend vers $+\infty$.